HEINRICH-HERTZ-INSTITUT FÜR SCHWINGUNGSFORSCHUNG
BERLIN-CHARLOTTENBURG

Technischer Bericht Nr. 13

Zum Problem der Abstrahlung von Biegewellen

Dipl.-Ing. G. SCHWANTKE

1 9 5 7

Technischer Bericht Nr. 13

Zum Problem der Abstrahlung von Biegewellen*)

Zusammenfassung

Als verbessertes Modell der Abstrahlung schwingender Platten mit Berücksichtigung des Einflusses des Empfangsraumes wird die Strahlung in einem einseitig offenen Rechteckraum betrachtet. Die Abstrahlung wird charakterisiert durch einen normierten quadratischen Mittelwert des Schalldruckes, für den der Name "Uebertragungsgrad" vorgeschlagen wird. Durch die Berücksichtigung des Nahfeldes ergibt sich daraus eine Entfernungsabhängigkeit unterhalb der Grenzfrequenz. Der Frequenzverlauf zeigt 2 Hauptmaxima beiderseits der Grenzfrequenz. Je mehr Halbwellen auf die Platte passen, umso näher rücken die Hauptmaxima zusammen, und der Verlauf nähert sich asymptotisch dem Verhalten der unbegrenzten Platte. Polstellen durch Raumresonanzen werden vermieden durch Einführung eines endlichen Wandwiderstandes.

Es ist in Strenge nicht möglich, in diesem Falle die Abstrahlung allein durch den Quotienten f/f_g auszudrücken, vielmehr ist als weiterer Parameter die Schwingungsform der Platte massgeblich. Daraus folgt aber, dass ein und dieselbe Plattenkonstruktion unterhalb der Grenzfrequenz ein recht verschiedenes Abstrahlverhalten zeigen kann, je nachdem wie breit sie ist und welchen Raum sie dabei abschliesst.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Der Bearbeiter
gez: Schwantke
(Dipl.-Ing. G. Schwantke)

Der Abteilungsleiter
gez: Cremer
(Prof. Dr.-Ing. L. Cremer)

Der Institutsdirektor
gez: Rothert
(Prof. Dr.-Ing. G. Rothert)

Berlin-Charlottenburg, den 14.5.1957

---

*) In etwas gekürzter Form vorgetragen von G. Schwantke auf der Physikertagung in München Sept. 1956.

Zum Problem der Abstrahlung von Biegewellen

I. Einleitung

Eine zu Biegeschwingungen angeregte Platte bewirkt ein Schallfeld in der umgebenden Luft, dessen Struktur infolge der Dispersion der Biegewellen von der Frequenz und von Plattenkonstanten abhängt. Im Idealfall der unbegrenzten und ungedämpften Platte [1, 2] tritt eine wirkliche Abstrahlung von Schallenergie überhaupt nur dann auf, wenn die Frequenz grösser ist als die Grenzfrequenz. Diese ist dadurch gekennzeichnet, dass dort Biege- und Luftwellenlänge übereinstimmen. Man macht sich diese Eigenschaft zunutze, indem man als Wandverkleidung biegeweiche Schalen, d.h. solche mit hoher Grenzfrequenz verwendet. [3]

Entfernt man sich vom Grenzfall der unbegrenzten Platte, so tritt auch unterhalb der Grenzfrequenz eine gewisse Abstrahlung auf. G ö s e l e [4] untersuchte dazu die Strahlung der nur in einem endlichen Bereich schwingenden unendlichen Platte in den Halbraum unter Benutzung der Rayleigh'schen Formel. W e s t p h a l [5] erhielt ebenfalls stetige Uebergänge für die zwar überall angeregte unbegrenzte, aber gedämpfte Platte. Hier müssen aber sehr viel grössere Dämpfungskonstanten angenommen werden, als praktisch vorliegen, so dass diese Deutung wohl weniger in Frage kommt.

Zur einfachen Charakterisierung der Abstrahlung einer Platte führte G ö s e l e [4] einen dimensionslosen "Abstrahlfaktor" ein. Dieser stellt die Normalkomponente des von der Platte ausgehenden Energiestromes $\mathfrak{S}$ dar,- zur dimensionslosen Normierung - bezogen auf die des Energiestromes eines konphas schwingenden Kolbens von - im räumlichen Mittel - gleicher Amplitude. Bezeichnet also $\underline{p}$ den Zeiger des Schalldruckes, $\underline{v_y}$ den der y - Komponente der Schnelle, wobei die y - Richtung (siehe Abb. 1) senkrecht auf der Platte steht, und beziehen sich $\underline{p_o}$ und $\underline{v_{oy}}$ auf den Vergleichsfall des konphas schwingenden Kolbens, so ergibt sich

$$s = \frac{S_y}{S_{oy}} = \frac{Re\{\underline{p}\ \underline{v}_y^*\}}{Re\{\underline{p}_o\ \underline{v}_{oy}\}} \qquad (1)$$

Speziell für die unbegrenzte Platte ergibt sich einfach

$$s = Re\left\{\frac{k}{k_y}\right\} \qquad (1a)$$

$k = \frac{\omega}{c}$ Kreiswellenzahl in Luft

$k_y = k\sqrt{1 - f_g/f}$

f_g Grenzfrequenz, eine spezifische Plattenkonstante

Die Bauakustik interessiert sich nun besonders für den Schallpegel in einem geschlossenen Raum, der durch eine solche Platte begrenzt wird. Nun stellt ja die Definition (1) ein Mass für die pro Flächeneinheit von der Platte abgestrahlte Energie dar. Man könnte also vermuten, dass - sieht man von Rückwirkungen der Raumschwingungen auf die Platte ab, was sicher zulässig ist - die Bedingungen der Abstrahlung in den freien Raum auch diesem Fall zugrundegelegt werden können. Aus der abgestrahlten Energie liesse sich dann leicht unabhängig von der speziellen Raumform nach Massgabe der Nachhallzeit die mittlere Schallenergiedichte bestimmen. Das heisst, man könne - sofern mehrere Biegewellen auf die Platte passen - weiterhin Gl. (1a) verwenden.

Tatsächlich gilt jedoch die damit geforderte Unabhängigkeit der Energieeinstrahlung von Raum - und Schwingungsform nicht allgemein, sondern nur, wenn wirklich statistische Verhältnisse angenommen werden können, wenn also genügend Raumeigenschwingungen angeregt werden. Anders liegen jedoch die Verhältnisse bei tiefen Frequenzen und kleinen Räumen. Hier reichen reine Energiebetrachtungen nicht mehr aus, vielmehr muss die Geometrie des entstehenden Schallfeldes genauer berücksichtigt werden. Da die Platte ein kohärent schwingendes Gebilde darstellt, hängt die Energieabstrahlung nicht nur von der Plattenschwingung, sondern auch vom Schallfeld im Raume ab.

Gerade für diesen Fall kann also die G ö s e l e 'sche Rechnung [4] der nur in einem endlichen Bereich angeregten, in den

Halbraum strahlenden unbegrenzten Platte nicht angewendet werden, da die wesentlichen Raumeigenschaften nicht erfasst werden.

Schliesslich werden Nahfelder durch die G ö s e l e 'sche Definition (1) nicht berücksichtigt. Was wir in der Nähe der angeregten Wand hören bzw. mit einem üblichen Druckempfänger messen, ist ja nicht der Energiestrom sondern der Effektivwert des Schalldrucks. Dieser kann durch den Einfluss des Nahfeldes in der Nähe der Platte grösser sein als dem Energiestrom entsprechen würde.

Es ist aus diesem Grund zu erwägen, ob man nicht diesen Verhältnissen Rechnung tragen sollte durch Einführung einer entsprechend modifizierten Grösse, die statt des Energiestromes das Quadrat des Schalldruckes selbst zugrundelegt. Bezeichnet die Ueberstreichung den Mittelwert über jeweils eine zur Platte parallele Ebene und bezieht sich p_o wie in Definition (1) auf den der Normierung dienenden Vergleichsfall des konphas schwingenden Kolbens, so folgt für den "Uebertragungsgrad" σ :

$$\sigma = \frac{\overline{|\underline{p}|^2}}{|\underline{p}_o|^2} \tag{2}$$

Um den Unterschied zur Definition (1) deutlich zu machen, sei der Wert für die unbegrenzte Platte angegeben:

$$\sigma = \left|\frac{k}{k_y}\right|^2 e^{-2y|\mathrm{Im}\{k_y\}|} \tag{2a}$$

Für $f < f_g$ bezeichnet der Exponentialfaktor ein rasch abklingendes Nahfeld, für $f > f_g$ ist k_y reell, und es besteht dann keine Entfernungsabhängigkeit mehr. In diesem Fall gilt also für jede Entfernung:

$$\sigma = \sigma_\infty = s^2 \tag{3}$$

Diese Beziehung gilt übrigens im Grenzfall sehr hoher Frequenzen ($f \to \infty$) auch für endliche Platten, da ihre Dimensionen nach dem allgemeinen Aehnlichkeitsgesetz der Akustik im Verhältnis zur Wellenlänge zu bewerten sind. Physikalisch sind beide De-

finitionen wesentlich verschieden, obwohl sich beide auf Energien beziehen. σ gibt im wesentlichen eine mittlere Energiedichte, δ dagegen eine Schallintensität an. Nun ist man von den ebenen Wellen her gewöhnt, diese Grössen als - bis auf feste Proportionalitätskonstanten - äquivalent anzusehen. Die Schallintensität indessen hat - im Gegensatz zur Energiedichte - Vektoreigenschaft und ist wie die Schallausbreitung gerichtet; man versteht zwar meist darunter den Betrag, d.h. man misst in Ausbreitungsrichtung. Der Strahlungsfaktor δ dagegen bezieht sich nur auf die y-Komponente, was deshalb sinnvoll ist, weil diese die pro Flächeneinheit von der Platte abgestrahlte Leistung angibt. Die Ausbreitungsrichtung hängt von der Frequenz ab.

Die Frage, welcher von beiden Definitionen der Vorzug zu geben ist, lässt sich nicht allgemein entscheiden. Wenn das Strahlungsfeld einer exakten Berechnung zugänglich ist - z.B. unbegrenzte Platte im freien Raum oder endliche Platte in gedämpften Räumen oder in kleinen Räumen bei tiefen Frequenzen -, hat der Uebertragungsgrad σ den Vorteil, unmittelbar die Messgrösse ρ zu liefern. Für statistische Verhältnisse - verhältnismässig hallige Räume bei nicht zu tiefen Frequenzen - ist dagegen der Strahlungsfaktor δ günstiger, da die dem Raum zugeführte Leistung nach Massgabe der Nachhallzeit unmittelbar die mittlere Energiedichte bestimmt. Die Nahfelder werden dann durch reflektierte Wellen weitgehend überdeckt. Passen genügend Biegewellenlängen auf die Platte, so kann man die Abstrahlungsbedingungen der unbegrenzten, in den Halbraum strahlenden Platte zugrundelegen, da man auf den speziellen Schwingungszustand des Raumes keine Rücksicht zu nehmen braucht.

II. Die Strahlung in den Rechteckraum

Die Abstrahlungsverhältnisse bei tiefen Frequenzen sollen nun an einem zweidimensionalen Modell untersucht werden, wie es in ähnlicher Weise schon von S c h o c h [6] zur Frage der Luftschalldämmung einer Wand endlicher Breite verwendet wurde. Die Geometrie des Empfangsraumes wird dabei wesentlich berücksichtigt im Gegensatz zur G ö s e l e ' schen Rechnung (Bild 1). Der Rechteckraum besteht aus zwei gegenüberstehenden, zunächst als schallhart

vorausgesetzten Seitenwänden, auf der einen Seite verbunden durch die angeregte Platte, ihr gegenüber eine offene bzw. totalabsorbierende Wand. Die Platte sei am Rand gelenkig gelagert und befinde sich in einer möglichen Eigenschwingungsform, die demgemäss gegeben ist durch

$$v_{yn}(y=0) = Re\left\{\hat{\underline{v}}_{yn} \sin n\frac{\pi}{\ell}x \cdot e^{j\omega t}\right\} \tag{4}$$

Soll diese Schwingung als freie Schwingung angesehen werden können, so ist damit für eine bestimmte Platte auch die Frequenz festgelegt.

Das im Empfangsraum erregte Schallfeld lässt sich auf das einer unendlichen Platte zurückführen, wenn man zur Erfüllung der Randbedingungen spiegelt, wie in Abb. 1 skizziert. Die Verschiedenheit der Randbedingungen für Platten - und Raumwelle schliesst aus, dass einer vorgegebenen Plattenschwingung genau eine Raumwelle entspricht, vielmehr wird in jedem Falle ein ganzes Spektrum von Wellentypen der Form

$$p_m = Re\left\{\hat{\underline{p}}_m \cos m\frac{\pi}{\ell}x \; e^{-jk_{my}y} \cdot e^{j\omega t}\right\} \tag{5}$$

mit

$$k_{my}^2 = k^2 - \left(m\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \tag{5a}$$

angeregt. (Die Zeitfaktoren und die Kennzeichnung der Zeiger durch Unterstriche werden im Folgenden unterdrückt). Damit ist

$$p_n = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{p}_{mn} \cos m\frac{\pi}{\ell}x \cdot e^{-jk_{my}y} \tag{6}$$

Die Amplituden der Teilwellen bestimmen sich aus der Forderung, dass die y-Komponente der Schnelle der Luft an der Platte mit derjenigen der Platte selbst übereinstimmen muss. Bei der unbegrenzten Platte allerdings lässt sich diese Forderung durch genau eine Raumwelle erfüllen, was zu einem Pol der Ausstrahlung in dem Fall führt, dass die Wellenlängen von Platte und Luft übereinstimmen.

Allgemein gilt also $v_{y\,\text{Platte}} = v_{y\,\text{Luft}}$ für $y = 0$ (7)

d.h.

$$\hat{v}_{0n} \sin n \frac{\pi}{\ell} x = \frac{1}{\omega \varrho} \sum_{m=0}^{\infty} \hat{p}_{mn}\, k_{my} \cos m \frac{\pi}{\ell} x \tag{7a}$$

Da nun

$$\frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} \sin n \frac{\pi}{\ell} x \cdot \cos m \frac{\pi}{\ell} x \, dx = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \dfrac{4n}{n^2 - m^2} & m+n \text{ ungerade} \\ 0 & m+n \text{ gerade} \end{cases}$$

ist, ergibt die Auflösung

$$\hat{p}_{mn} = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \hat{v}_0 \varrho c \dfrac{n \varepsilon_n}{n^2 - m^2} \cdot \dfrac{k}{k_{my}} & m+n \text{ ungerade} \\ 0 & m+n \text{ gerade} \end{cases} \tag{8}$$

$$\varepsilon_m = \begin{cases} \frac{1}{2} & m = 0 \\ 1 & m > 0 \end{cases} \tag{8a}$$

Wir bilden nun aus Gl. (6) und (8) den Uebertragungsgrad. Dabei beziehen wir diesen auf den Druck p_0, der von einer Kolbenschwingung einer Membran mit der Schnelle-Amplitude $\hat{v}_0/\sqrt{2}$ erzeugt wird, die also den gleichen quadratischen Mittelwert aufweist. Ebenso wird auch für den Zähler in Gl. (2) der quadratische Mittelwert über den Querschnitt, hier also über die x-Koordinate gebildet. Wir erhalten so den Ausdruck:

$$\sigma = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m / n^2}{\left[1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right]^2} \cdot \frac{1}{\left|1 - \left(\frac{m}{\varphi}\right)^2\right|} \cdot e^{-2yk \left| \operatorname{Im}\left\{\sqrt{1 - \left(\frac{m}{\varphi}\right)^2}\right\}\right|} \tag{9}$$

$m+n$ ungerade

Hierbei ist der dimensionslose Parameter

$$\varphi = \frac{\ell}{\pi} k \tag{10}$$

eingeführt, welcher die Frequenz in Vielfachen der tiefsten Raumeigenfrequenz angibt.

Abb. 2 zeigt den Verlauf von σ über φ für eine festgehaltene Schwingungsform mit n = 9 Halbwellen auf der Platte. Soll diese

Kurve (- wie in den früheren Untersuchungen -) für freie Biegewellen gelten, so bedeutet das, dass sich längs der Abszisse neben der Frequenz auch die Plattendicke ändern muss, so dass sich stets die gleiche Ordnungszahl n ergibt.

Eine Art Hüllkurve wird durch den ersten Faktor in den Summengliedern bewirkt, indem die einzelnen Teilwellen eine solche Bewertung erhalten, dass die der Grenzfrequenz am nächsten liegenden beiden Teilwellen mit dem grössten Gewicht auftreten. Der zweite Faktor berücksichtigt den Frequenzgang des Raumes und ist für die Polstellen an den Raumresonanzen verantwortlich. Der letzte Faktor schliesslich zeigt die Entfernungsabhängigkeit, die sich oberhalb der beiden Hauptmaxima bzw. Hauptpole bei $\varphi = n-1;\ n+1$ als wesentlich geringer erweist als unterhalb.

Für hohe Frequenzen, d.h. $\varphi \gg n$, kann man die beiden letzten Faktoren - abgesehen von den Stellen, wo der Nenner verschwindet - ausser acht lassen. Bei nicht ideal schallharten Seitenwänden verschwinden auch diese Ausnahmestellen. Die so verbleibende Summe lässt sich mit Methoden der Funktionentheorie auswerten und man findet:

$$\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \neq n \\ \text{ungerade}}}^{\infty} \frac{\varepsilon_m / n^2}{\left[1 - \left(\frac{m}{n}\right)^2\right]^2} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \qquad (11)$$

so dass hier gilt

$$\sigma = \sigma_0 = \sigma_\infty = 1$$

für $\varphi \to \infty$. Dieses Verhalten ist andererseits auch zu fordern. Die Wellen laufen in diesem Fall praktisch genau senkrecht von der Platte weg, so dass ungeachtet der Seitenwände das Verhalten dem der unbegrenzten Platte für hohe Frequenzen - genauer: weit oberhalb der Grenzfrequenz - entsprechen muss.

III. Der Einfluss der Wanddämpfung

Die Resonanzpole im Frequenzverlauf Abb. 2 entstehen durch die Annahme nicht absorbierender Seitenwände. Mathematisch lässt sich der Verlauf sehr einfach glätten und damit den wirklichen Verhältnissen anpassen durch Einführung einer Luftabsorption.

was sich durch ein komplexes k bzw. φ ausdrücken würde. Dadurch würden die Nenner in den Gliedern (9) nicht mehr verschwinden. Praktisch spielt dieser Effekt jedoch nur eine sehr geringe Rolle gegenüber der Absorption der Seitenwände.

Nehmen wir einen endlichen Wandwiderstand W an, der für beide Seitenwände gleich sein soll, so lautet die neue Randbedingung für x = 0 :

$$p - \frac{W}{j\omega\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{12}$$

und für x = ℓ:

$$p + \frac{W}{j\omega\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

Mit $|W| \to \infty$ erhält man natürlich wieder die Eigenfunktionen (5). Im allgemeinen Fall aber ändern sich die Eigenfunktionen demgegenüber ab und die Eigenwerte verschieben sich ins Komplexe. Dabei können wir für die Eigenfunktionen ansetzen:

$$p_m \sim \cos k_{mx} x + \xi_m \sin k_{mx} x$$

wobei $\xi \to 0$ mit $|W| \to \infty$ wird,
und erhalten so für

$$x = 0: \qquad 1 - \frac{W k_{mx}}{j\omega\varrho}\,\xi_m = 0$$

und für

$$x = \ell: \quad \cos k_{mx}\ell \cdot \left(1 + \frac{W k_{mx}}{j\omega\varrho}\,\xi_m\right) + \sin k_{mx}\ell \cdot \left(\xi_m - \frac{W k_{mx}}{j\omega\varrho}\right)$$

Daraus ergibt sich:

$$\operatorname{ctg} k_{mx}\ell = \frac{1}{2}\left(\frac{W k_{mx}}{j\omega\varrho} - \frac{j\omega\varrho}{W k_{mx}}\right) \tag{14}$$

Diese Beziehung entspricht genau einer in [1] für den schallschluckenden Kanal abgeleiteten, dort aber auf den Fall gerader m spezialisierten Relation.

Wenn in Gl. (14) einer der beiden Summanden hinreichend gross ist, d.h. sowohl im Fall sehr grossen als auch sehr kleinen Wandwiderstandes, ist eine lineare Näherung möglich. Hier wollen

wir den Fall grossen Wandwiderstandes behandeln.
Dann gilt mit

$$k_{mx} = (m + \Delta m)\frac{\pi}{\ell} \tag{15a}$$

$$\left|\frac{W}{\varrho c}\,\frac{k_{mx}}{k}\right| \gg 1 \tag{15b}$$

$$\pi\,\Delta m \simeq 2j\,\frac{\varrho c}{W}\cdot\frac{k}{k_{mx}} \tag{16}$$

$$m \neq 0:\ \pi\,\Delta m \simeq 2j\,\frac{\varrho c}{W}\cdot\frac{k\ell}{m\pi} \tag{16a}$$

$$m = 0:\ \pi\,\Delta_0 \simeq \sqrt{2j\,\frac{\varrho c}{W}\cdot k\ell} \tag{16b}$$

Die Näherung (16b) verlangt an Stelle von (15b) die Voraussetzung $\left|\frac{W}{\varrho c}\right|\cdot\frac{1}{k\ell} \gg 1$. Der Wandwiderstand muss also mit der Frequenz wachsen, was schwer zu realisieren ist. Trotzdem darf die Näherung beibehalten werden, weil in dem hier behandelten Zusammenhang das 0te Glied nur bei tiefen Frequenzen interessiert und überdies sein Beitrag zur Gesamtsumme für $m > 1$ klein ist.

Damit erhält man schliesslich für die Wellenzahlen:

$$k_{mx} = m\frac{\pi}{\ell} + 2j\,\frac{\varrho c}{W}\,\frac{k}{m\pi} \tag{17a}$$

$$k_{0x} = \sqrt{2j\,\frac{\varrho c}{W}\cdot\frac{k}{\ell}} \tag{17b}$$

Zur Abschätzung des Gültigkeitsbereichs der Näherung betrachten wir $W = w$ der Einfachheit halber als reell. Dann gilt bekanntlich für den Schluckgrad α der Wände für die m^{te} Teilwelle:

$$\alpha = \frac{4\,\frac{\varrho c}{w}\cdot\frac{k}{k_{mx}}}{\left(1 + \frac{\varrho c}{w}\,\frac{k}{k_{mx}}\right)^2} \tag{18}$$

Nun bleibt der Fehler der Näherung $\operatorname{tg}(jx + n\pi) \simeq jx$ für $x \leq 0{,}55$ unterhalb 10% für diesen Bereich folgt aus Gl. (16):

$$m \neq 0: \quad |\pi \Delta m| \simeq 2 \frac{\varrho c}{w} \frac{k}{k_{mx}} \leq 0{,}55$$

(Dabei sei - wie auch in Gl. (18) - hier unter k_{mx} der Realteil von (17a) verstanden).

$$\alpha \leq \frac{2 \cdot 0{,}55}{(1 + \frac{1}{2}\, 0{,}55)^2} \simeq 0{,}7 \tag{19a}$$

Innerhalb der genannten Fehlergrenzen ist also ein Schluckgrad bis zu 70% zulässig. Wie die Ableitung zeigt, müsste - streng genommen - der Schluckgrad der Wände unabhängig von der Einfallsrichtung sein, was praktisch selten vorliegt. Das bedeutet, dass der Wandwiderstand w für schräge Einfallsrichtungen entsprechend zunehmen müsste gemäss

$$w \geq \frac{2}{0{,}55} \cdot \varrho c \frac{\varphi}{m} = 3{,}6 \cdot \frac{\varrho c}{\cos \vartheta} \tag{19b}$$

wenn ϑ der Einfallsrichtung in Bezug auf die Wand entspricht.

Nun ist aber zu bedenken, dass der Hauptbeitrag jeder Teilwelle zur Summe Gl. (21) in der Nähe der jeweiligen Eigenresonanz liegt, für die ja fast senkrechter Einfall in Bezug auf die Seitenwände vorliegt. Ein Fehler für die anderen Einfallsrichtungen fällt daher kaum ins Gewicht.

Um die Form (9) mit den modifizierten Eigenwerten (17) übernehmen zu können, muss der Charakter der stehenden Wellen in Querrichtung erhalten bleiben, sonst müssten bei der Mittelwertsbildung für σ durch die gestörte Orthogonalität der Eigenfunktionen weitere gemischte Glieder hinzutreten. Wie eine Abschätzung, die hier nicht im einzelnen ausgeführt werden soll, zeigt, bleibt der Beitrag dieser Glieder selbst bei der hohen Dämpfung von α = 70% in dem wesentlich interessierenden Bereich in der Nähe der Grenzfrequenz und darunter unterhalb von 5%. Die rein quadratische Form für σ darf also auch in diesem Fall beibehalten werden.

In gleicher Näherung folgt weiter:

$$\left(\frac{k_{my}}{k}\right)^2 = 1 - \left[\left(m\frac{\pi}{\ell}\right)^2 + 4j\,\varepsilon_m \frac{\varrho c}{W}\,\frac{k}{\ell}\right] \tag{20}$$

$$= 1 - \left(\frac{m}{\varphi}\right)^2 - 4j\,\varepsilon_m \frac{\varrho c}{W}\cdot\frac{1}{\pi\varphi}$$

Dieser Ausdruck ist einzusetzen in:

$$\sigma = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m+n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{\varepsilon_m / n^2}{\left[1-\left(\frac{m}{n}\right)^2\right]^2} \left|\frac{k}{k_{my}}\right|^2 e^{-2y\left|\mathfrak{J}m\{k_{my}\}\right|} \tag{21}$$

An die Stellen der früheren Pole treten jetzt endliche Maxima mit der Resonanzerhöhung

$$\left|\frac{k}{k_{my}}\right| = \frac{\pi}{4}\,\frac{|W|}{\varrho c}\cdot m$$

Für die Dämpfungskonstante $\mathfrak{J}m\{k_{my}\}$ gewinnt man aus Gl. (2o) für die einzelnen Bereiche verschiedene Näherungen:

$$\mathfrak{J}m\{k_{my}\} = \begin{cases} k\sqrt{\left(\frac{m}{\varphi}\right)^2 - 1} \simeq \frac{\pi}{\ell}\,m & \varphi \ll m \\ k\sqrt{2\,\varepsilon_m \frac{\varrho c}{\pi m}}\left[\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{W}}\right\} - \mathfrak{J}m\left\{\frac{1}{\sqrt{W}}\right\}\right] & \varphi = m \\ 2\,k\,\varepsilon_m \frac{\varrho c}{\pi\varphi}\cdot \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{W}\right\} & \varphi \gg m \end{cases} \tag{22}$$

Den Verlauf zeigt Abb. 3 links für verschiedene Abstände und den verhältnismässig grossen Schluckgrad der Wände α = 71% entspr. $\frac{\varrho c}{w} = 0{,}3$ bei senkrechtem Einfall.

IV. Der Zusammenhang mit der Grenzfrequenz

Bei der Strahlung einer endlichen oder unendlichen Platte in den freien Halb-Raum ist der Frequenzgang bei gegebener Plattengrösse allein abhängig von der Variablen f/f_g. Dabei ist die Grenzfrequenz f_g durch Masse und Biegesteife der Platte bestimmt und dadurch gekennzeichnet, dass für diese Frequenz Biege- und Luftwellenlänge übereinstimmen.

Es gilt also

$$k = \frac{\omega}{c} = k_B = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 \mu}{B}}$$

$$\omega_g = c^2 \cdot \sqrt{\frac{\mu}{B}} \qquad (23)$$

Hierin bedeuten μ die Masse je Fläche und B die Biegesteife der Platte.

Für die freie Schwingung einer Platte der Länge l gilt andererseits:

$$k_B = n \frac{\pi}{\ell} = \frac{1}{c} \sqrt{\omega \cdot \omega_g}$$

$$\omega = \left(\frac{n \pi c}{\ell}\right)^2 \cdot \frac{1}{\omega_g}$$

oder mit der Bezeichnung von Gl. (6) mit $\begin{cases} \varphi = \frac{\ell}{\pi c} \cdot \omega \\ \varphi_g = \frac{\ell}{\pi c} \cdot \omega_g \end{cases}$

$$\varphi \cdot \varphi_g = n^2 \qquad (24)$$

Die beiden Diagramme Abb. 2 und 3 zeigen die beiden Hauptmaxima beiderseits der Stelle $\varphi = n$. Das bedeutet aber nach Gl. (24) die Grenzfrequenz. Die Aehnlichkeit des Frequenzganges mit dem der ∞ Platte wird noch deutlicher, wenn man den Frequenzverlauf nach der Variablen $f/f_g = \varphi/\varphi_g = \left(\frac{\varphi}{n}\right)^2$ umzeichnet, was demnach nur eine quadratische Verzerrung der Abszisse bedeutet. (Abb. 3, rechtes Diagramm).

Dazu ist nochmals zu bemerken, dass der Frequenzgang für einen

festgehaltenen Schwingungszustand aufgetragen ist, nicht jedoch für eine feste Grenzfrequenz wie es bei der Abstrahlung in den freien Raum üblich ist. Da in unserem Fall bei festem n und fester Grenzfrequenz nur eine einzige Frequenz als freie Schwingung auftritt, muss mit der Frequenz gleichzeitig die Grenzfrequenz entsprechend Gl. (24) variert werden, um die ganze Kurve zu durchfahren. Das beeinflusst jedoch die Vergleichbarkeit mit den Kurven von G ö s e l e und W e s t p h a l nicht.

In Abb. 4 sind solche Darstellungen für verschiedene n zusammengestellt, jeweils gültig für einen Aufpunkt unmittelbar an der Platte. Mit zunehmendem n wandern die beiden Hauptmaxima immer näher an die Grenzfrequenz und werden spitzer, so dass für $n \rightarrow \infty$ der Verlauf für die unendliche Platte asymptotisch erreicht wird. Dieses Verhalten ist auch zu verlangen, da der Einfluss der Wände immer geringer werden muss, je mehr Biege-Halbwellen auf die Platte passen.

Sieht man aber von diesem Grenzfall ab, so erkennt man, dass durch den Einfluss der Seitenwände auch unterhalb der Grenzfrequenz eine Abstrahlung auftritt. Allerdings führen die Raumresonanzen zu einer starken Welligkeit des Frequenzverlaufs unterhalb f_g .

Für eine gegebene Platte mit z.B. f_g = 500 Hz tritt von jeder Kurve der Schar Abb. 4 nur ein Punkt (markiert durch einen kleinen Kreis) als freie Schwingung auf. Dieser kann im Resonanzmaximum oder auf einer der Flanken liegen. Würde man nun den Frequenzgang für eine erzwungene Schwingung bei fester Grenzfrequenz aus diesen Punkten bilden unter der Annahme, dass bei Anregung immer die nächstliegende freie Schwingung die grösste Amplitude hat und alles andere überwiegt, so würde man zu recht verschiedenem Verlauf kommen, wenn man bei der gleichen Grenzfrequenz die Raumgrösse etwas verändert, da bei der grossen Flankensteilheit eine kleine Verschiebung der Resonanzen eine grosse Aenderung des Abstrahlfaktors bzw. Strahlungsgrades unterhalb der Grenzfrequenz bewirkt. Es erscheint daher möglich, Diskrepanzen in den Messwerten aus

verschiedenen Laboratorien für die gleiche Plattenkonstruktion auf die Einflüsse der Grösse von Raum und Plattenprobe zurückzuführen.

Literaturverzeichnis

1. C r e m e r , L. — Die wiss. Grundl. d. Raumakustik Bd. III, Leipzig 1950
2. B r i l l o u i n , J. — Acustica 2 (1952) S. 65
3. G ö s e l e , K. — Bauzeitung 54 (1949) S. 632 und Bauzeitung 56 (1951) S. 264
4. G ö s e l e , K. — Acustica 3 (1953) S. 243
5. W e s t p h a l , W. — Acustica 4 (1954) S. 603
6. S c h o c h , A. — Acustica 4 (1954) S. 288

Die vorliegende Arbeit erscheint als gemeinsame Veröffentlichung von Prof. Dr.-Ing. L. C r e m e r und Dipl.-Ing. G. S c h w a n t k e in den Beiheften der "Acustica" Sommer 1957.

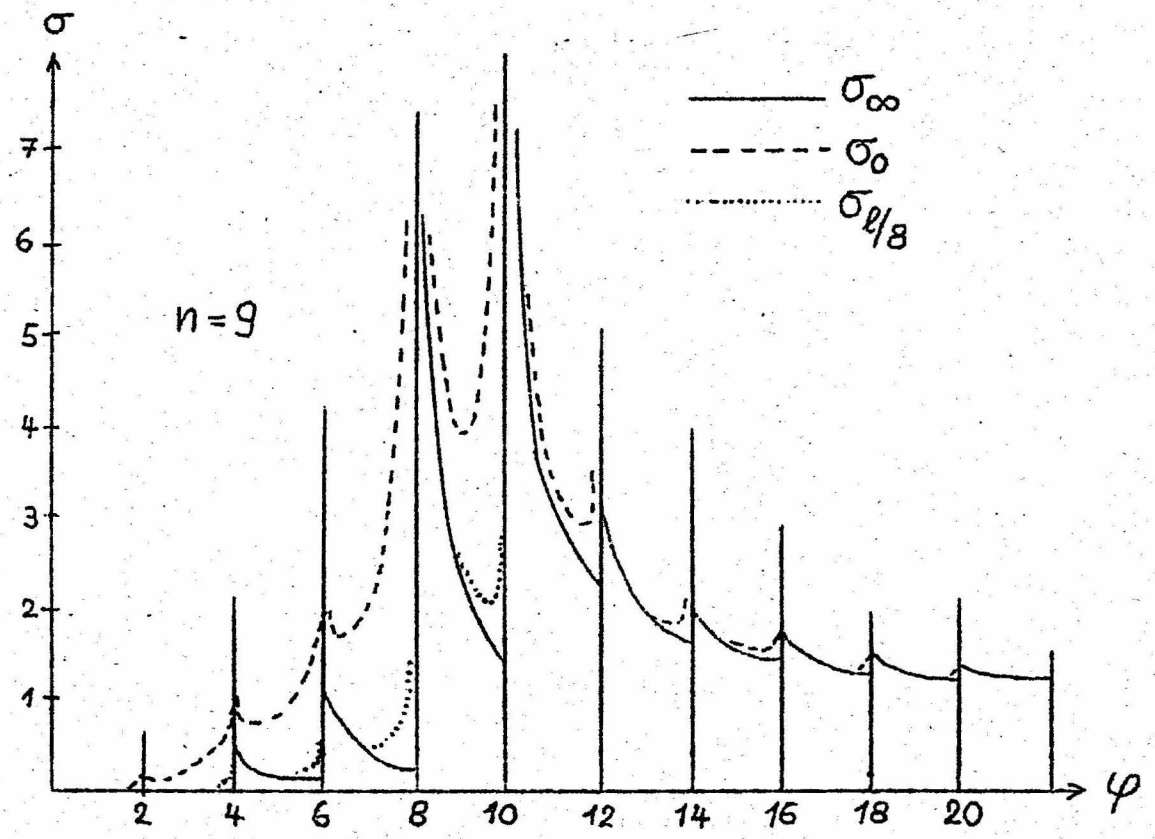

Abb. 2
FREQUENZVERLAUF des ÜBERTRAGUNGSGRADES
ohne DÄMPFUNG für VERSCHIEDENE ABSTÄNDE

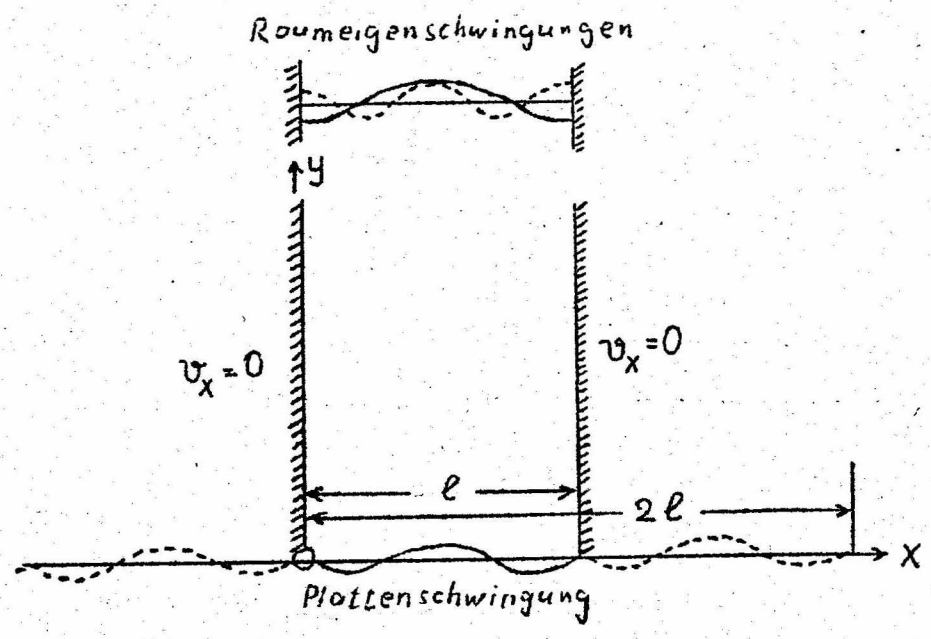

Abb. 1
STRAHLUNG EINER SCHWINGENDEN WAND
IN DEN RAUM ZWISCHEN PARALLELEN
EBENEN

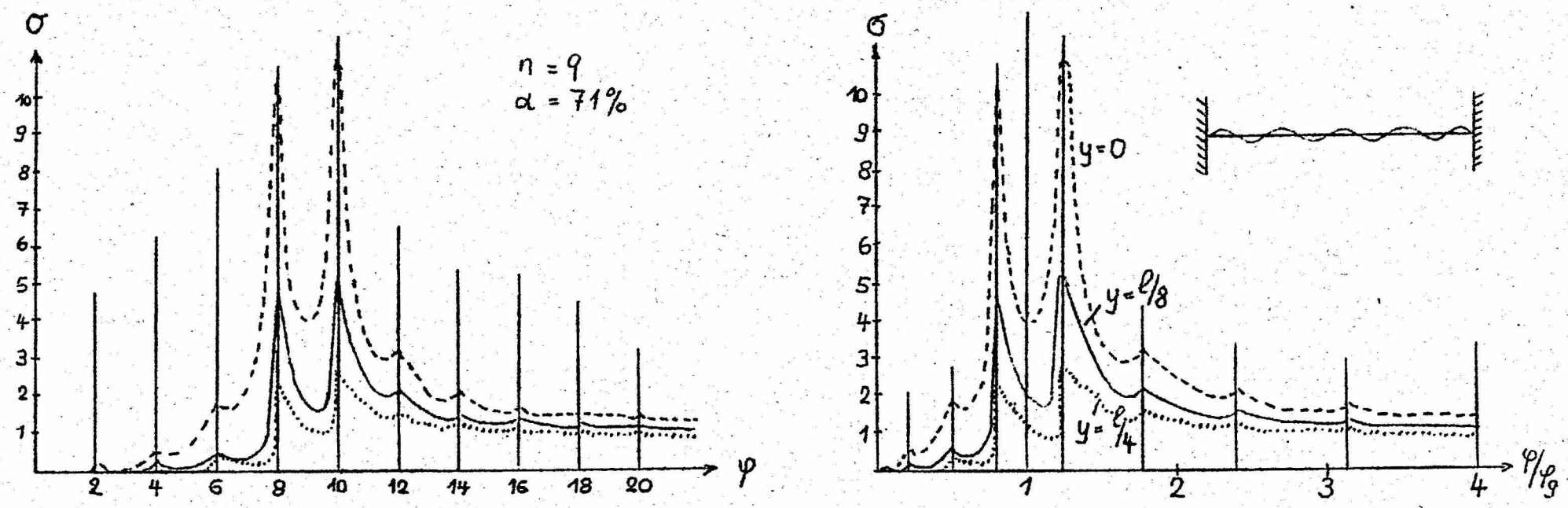

Abb.3
EINFLUSS DER DÄMPFUNG DURCH ENDLICHEN WAND=
WIDERSTAND. FREQUENZVERLAUF VON φ FÜR
VERSCHIEDENE ABSTÄNDE

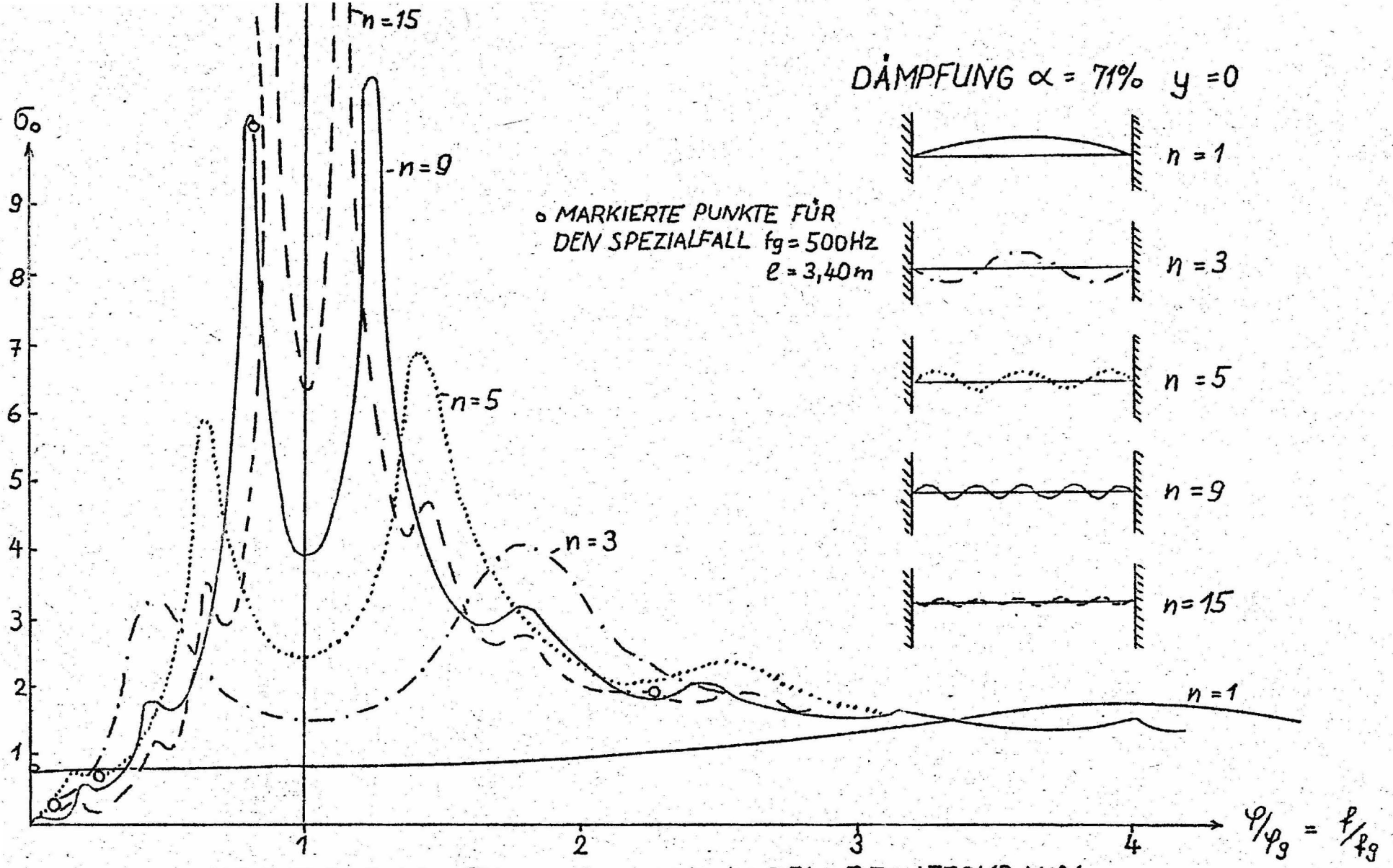

Abb. 4. BIEGEWELLENABSTRAHLUNG IN DEN RECHTECKRAUM ÜBERTRAGUNGSGRAD FÜR VERSCHIED. SCHWINGUNGS-ZUSTÄNDE